



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»**

**В Г. ВОЛГОДОНСКЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

**(Институт технологий (филиал) ДГТУ в г. Волгодонске)**



**ТВЕРЖДАЮ**  
Директор  
И.В. Столяр  
26 апреля 2022 г.

Методические указания для самостоятельной работы по разделу «Статика»

по дисциплине

«Теоретическая механика»

для обучающихся по направлению подготовки

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение  
машиностроительных производств

профиль Технология машиностроения

2022 года набора

Волгодонск

2022

## Лист согласования

Методические указания по дисциплине «Теоретическая механика»  
составлены в соответствии с требованиями Федерального  
государственного образовательного стандарта высшего образования по  
направлению подготовки (специальности)

15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение  
машиностроительных производств

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры «ТСиИТ» протокол 9  
«26» 2022 .

## Содержание:

1. Основные понятия и определения статики	4
2. Методические указания к решению задач статики	9
3. Типы связей. Реакции связей	9
4. Порядок (план) решения задач	11
5. Система сходящихся сил	12
6. Плоская система сил	18
7. Система параллельных сил	21
8. Равновесие тел с учетом трения	25
9. Центр тяжести	30
10. Произвольная пространственная система сил	37
11. Порядок (план) решения задач	39

## **Основные понятия и определения статики**

**Плоская произвольная система сил** - система сил, как угодно расположенных, в одной плоскости.

**Для равновесия** любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор  $\vec{F}$  этой системы сил и ее главный момент  $\vec{M}_O$  относительно любого центра  $O$  были равны нулю, то есть чтобы выполнялись условия

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k) = 0 \quad (1)$$

Из (1) вытекают три аналитических условия (уравнения) равновесия плоской произвольной системы сил, которые можно записать в трех различных формах.

**Первая** (основная) форма условий равновесия:

для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей  $X$  и  $Y$  и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки  $O$ , лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю, то есть

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum M_O(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**Вторая** форма условий равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

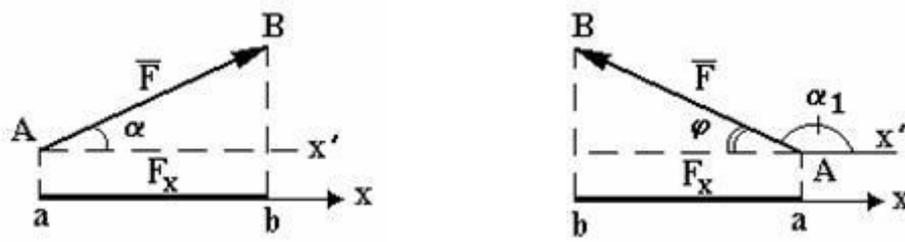
Прямая  $AB$  не должна быть перпендикулярна оси  $X$ .

**Третья** форма условий равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum M_C(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Точки  $A, B, C$  не должны лежать на одной прямой.

**Проекцией силы**  $(\vec{F})$  на ось  $(X)$  называют отрезок  $(ab = F_x)$ , заключенный между перпендикулярами, опущенными из начала  $(A)$  и конца  $(B)$  вектора силы на эту ось.



- a)  $F_x = ab > 0$   
 b)  $F_x = -ab < 0$

**Рис. 1**

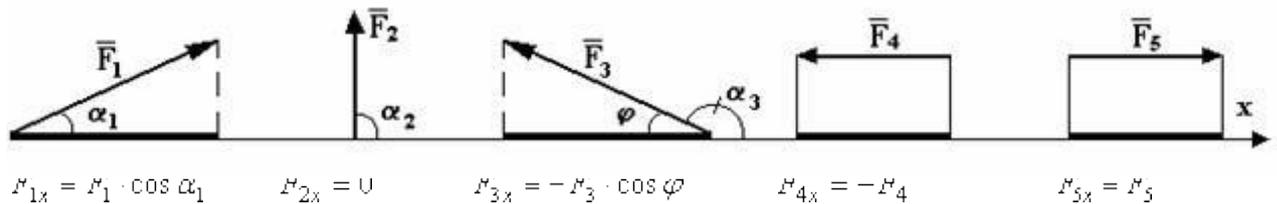
Проекция силы на ось ( $F_x$ ) равна произведению модуля силы ( $F$ ) на косинус угла между силой ( $\vec{F}$ ) и положительным направлением оси ( $X$ ).

Из рис. 1 следует:

- а) если этот угол ( $\alpha$ ) острый - проекция положительна и  $F_x = F \cdot \cos \alpha = ab$  ;  
 б) если угол ( $\alpha_1$ ) тупой - проекция отрицательна и  $F_x = F \cdot \cos \alpha_1 = -F \cdot \cos \varphi = -ab$  .

Практика показывает, что угол  $\alpha$  может быть (рис. 2):

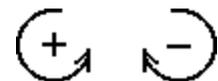
- 1)  $\alpha_1^0 < 90^0$       2)  $\alpha_2^0 = 90^0$       3)  $\alpha_3^0 > 90^0$       4)  $\alpha_4^0 = 180^0$       5)  $\alpha_5^0 = 0^0$



**Рис. 2**

**Моментом силы  $\vec{F}$**  относительно любой точки  $O$  называется произведение модуля силы на плечо, взятое со знаком плюс или минус.

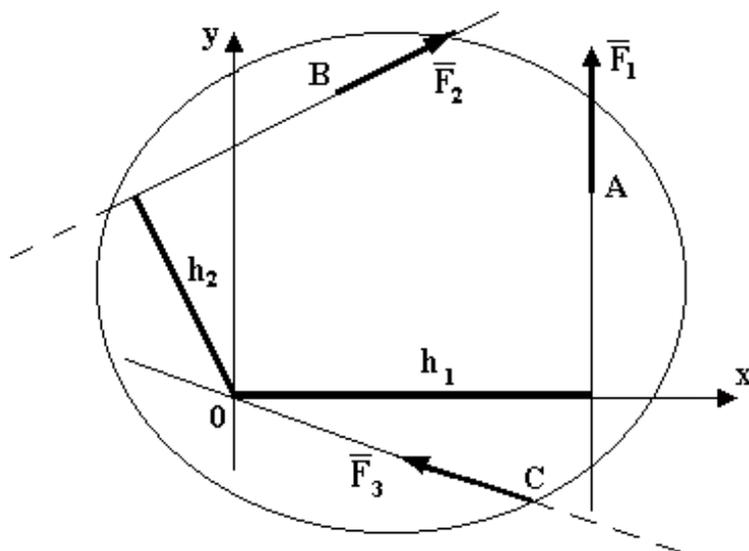
$$M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$



Плюс берется, если сила стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против хода часовой стрелки, минус, - если, - по ходу часовой стрелки.

**Плечо  $h$**  - кратчайшее расстояние от точки поворота  $O$  до линии действия силы.

Если линия действия силы пересекает точку  $O$ , то ее момент относительно этой точки равен нулю, так как  $h = 0$  .



**Рис. 3**

Из рис. 3:

$$M_0(\bar{F}_1) = +F_1 \cdot h_1$$

$$M_0(\bar{F}_2) = -F_2 \cdot h_2$$

$$M_0(\bar{F}_3) = 0, \text{ так как } h_3 = 0.$$

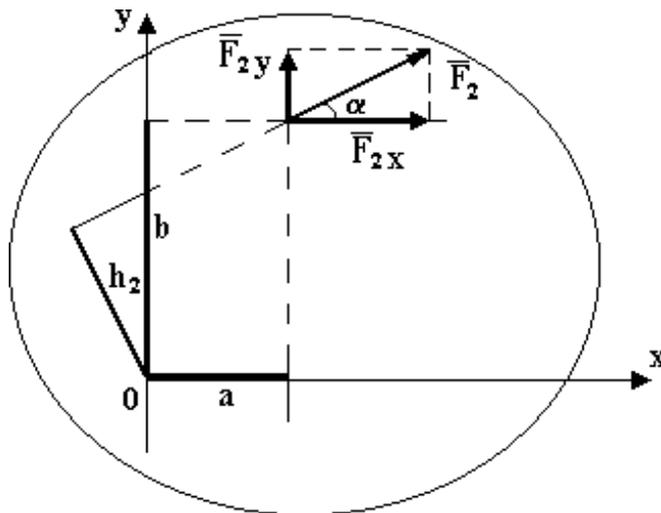
При определении момента силы  $\bar{F}_2$ , у студента вызывает трудность вычисление плеча  $h_2$ . Поэтому, чтобы упростить эту задачу, надо:

а) разложить силу  $\bar{F}_2$  на ее составляющие  $\bar{F}_x$  и  $\bar{F}_y$  параллельно выбранным осям  $X$  и  $Y$ ;

б) применить теорему Вариньона (рис. 4)

$$M_0(\bar{F}) = M_0(\bar{F}_x) + M_0(\bar{F}_y). \quad (5)$$

Момент равнодействующей силы  $(\bar{F})$  относительно точки  $O$  равен алгебраической сумме моментов составляющих ее сил  $(\bar{F}_x, \bar{F}_y)$  относительно той же точки  $O$ .

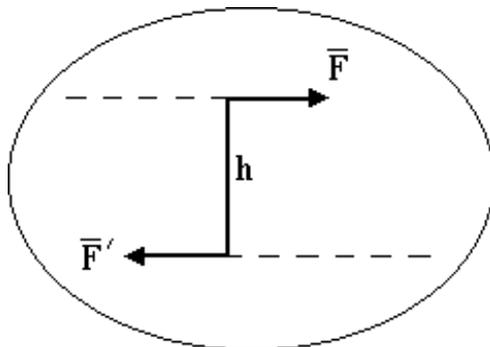


**Рис. 4**

$$M_0(\vec{F}_2) = -F_{2x} \cdot b + F_{2y} \cdot a \quad \text{или}$$

$$M_0(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot \cos \alpha \cdot b + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot a$$

**Парой сил** называют две силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  равные по величине, противоположно направленные и параллельные между собой (рис. 5).



**Рис. 5**

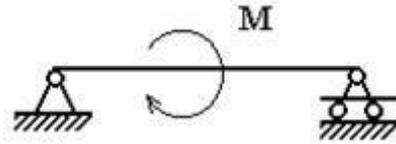
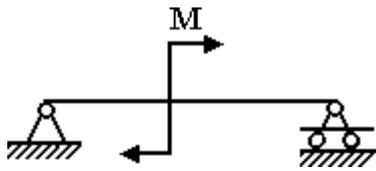
**Моментом пары сил** называют произведение модуля одной из сил пары на плечо, взятое со знаком плюс или минус, то есть

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F \cdot h$$

Момент пары считается положительным, если пара, в плоскости ее действия, стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным, если, - по ходу.

**Плечо пары h**- кратчайшее расстояние между линиями действия пары.

Так как действие пары сил на твердое тело характеризуется (определяется) только моментом, то рис.6а и рис.6б считаются идентичными



(a)

(b)

Рис. 6

**Распределенные силы** - система сил распределенных вдоль поверхности по тому или иному закону.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее **интенсивностью**  $q$ .

$q$  - значение силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка.

Измеряется  $q$  в ньютонах, деленных на метр (Н/м).

При составлении расчетной схемы **распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой**  $Q$ :

- величина силы  $Q$  пропорциональна площади эпюры распределения сил;

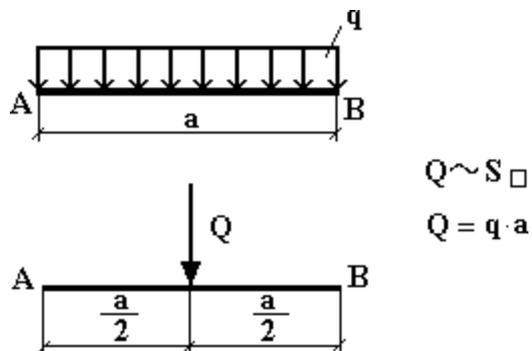
- направлена сила  $Q$  параллельно заданной нагрузке в сторону ее действия;

- линия действия силы  $Q$  проходит через центр тяжести той же эпюры распределения сил.

**Силы равномерно распределенные вдоль отрезка прямой АВ** (рис. 7а)

(например, силы тяжести, действующие на однородную балку).

a)



b)

Рис. 7

## Силы распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (рис. 8а)

(например, силы давления воды на пластину).

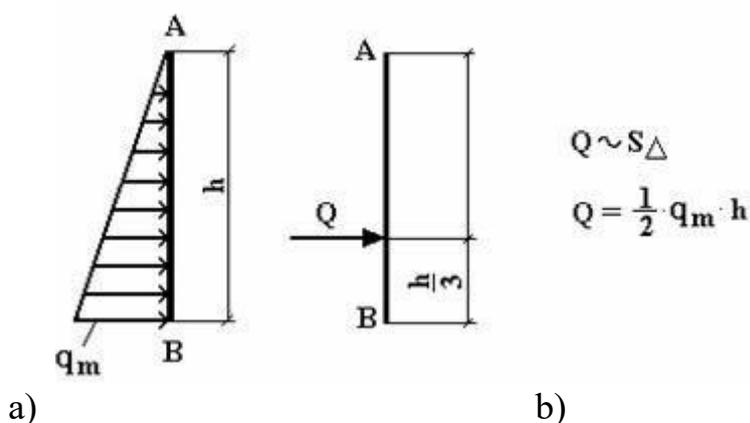


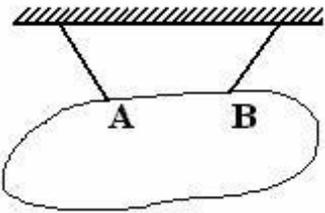
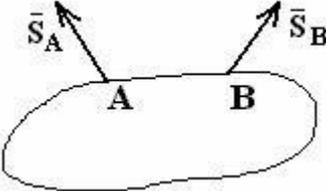
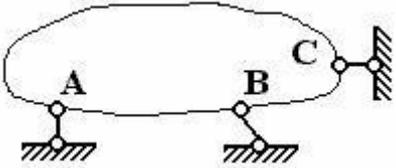
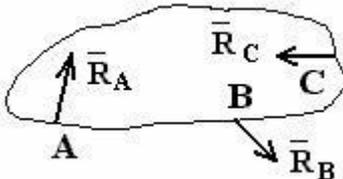
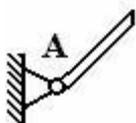
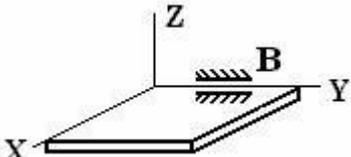
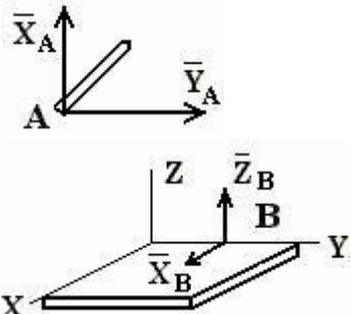
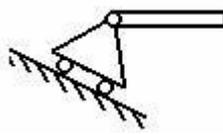
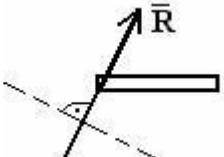
Рис. 8

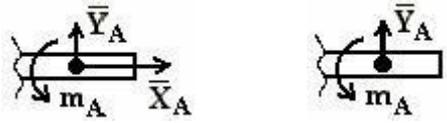
### Методические указания к решению задач статики.

Решение задач статики, сводится к определению реакций опор, с помощью которых крепятся балки, жесткие рамы, всевозможные конструкции. Определение модулей и направлений сил реакций связей (опор) имеет первостепенное практическое значение, так как, зная реакции, будем знать и силы давления на связь. А это, в свою очередь, позволит, пользуясь законами сопротивления материалов, рассчитать прочность конструкции или сооружения.

### Типы связей. Реакции связей

Наименование связей и их обозначение на схемах	Реакции связей
<p>1. Гладкая поверхность (точка А) и уступ (точка В)</p>	<p>Реакция <math>\bar{N}</math> направлена к телу.</p> <p>Реакция <math>\bar{N}_A</math> гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел.</p> <p>Реакция <math>\bar{N}_{\text{буступа}}</math> направлена по нормали к поверхности опирающегося тела.</p>

<p>2. Нить</p> 	<p>Реакция <math>\vec{S}</math> направлена вдоль нити от тела (нить работает только на растяжение)</p> 
<p>3. Невесомый стержень с шарнирами на концах</p> 	<p>Реакция <math>\vec{R}</math> направлена вдоль стержня, стержень работает либо на растяжение, либо на сжатие.</p> 
<p>4. Цилиндрический шарнир (подшипник)</p> <p>A – ось подшипника перпендикулярна чертежу</p>  <p>B – ось подшипника совпадает с осью Y</p> 	<p>Составляющие реакции лежат в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.</p> 
<p>5. Подвижная шарнирная опора (на катках)</p> 	<p>Реакция направлена перпендикулярно опорной плоскости</p> 

<p>6. Заделка</p> <p>а) жесткая      б) скользящая</p> 	<p>Реакции при действии на тело плоской системы сил</p> <p>а) жесткая      б) скользящая</p> 
--	---

### Порядок (план) решения задач.

Приступая к решению задания, необходимо разобраться в условии задачи и рисунке, а затем:

1. Составить расчетную схему, которая включает:
  - объект равновесия,
  - активные (заданные) силы,
  - силы реакции, заменяющие действия отброшенных связей.
2. Определить вид полученной системы сил и выбрать, соответствующие ей, уравнения равновесия;
3. Выяснить, является ли задача статически определимой;
4. Составить уравнения равновесия и определить из них силы реакции;
5. Сделать проверку полученных результатов.

При замене связей (опор) силами реакций помнить:

- если связь препятствует перемещению тела только в одном каком-нибудь направлении, то направление ее реакции противоположно этому направлению;

- если же связь препятствует перемещению тела по многим направлениям, то силу реакции такой связи изображают ее составляющими, показывая их параллельно выбранным координатным осям  $X$  и  $Y$ .

Решение уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое из них. Поэтому, при составлении уравнений равновесия следует:

1) координатные оси  $X$  и  $Y$  располагать так, чтобы одна из осей была перпендикулярна к линии действия хотя бы одной из неизвестных сил, в этом случае проекция неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия;

2) за центр моментов выбирать точку, в которой пересекаются линии действия наибольшего числа неизвестных сил реакций, тогда моменты этих сил не войдут в уравнение моментов.

Если сила  $\vec{F}$  в плоскости  $XU$  имеет две составляющие ее силы  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$ , то при вычислении момента силы  $\vec{F}$  вокруг некоторой точки  $O$ , полезно применить теорему Вариньона, вычислив сумму моментов составляющих ее сил относительно этой точки (см. рис. 4).

Если к телу в числе других сил приложена пара сил, то ее действие учитывается только в уравнении моментов сил, куда вносится момент этой пары, с соответствующим, знаком.

### Система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *системой сходящихся сил*.

Согласно аксиоме статики, равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис.9).

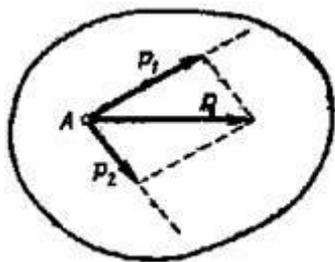


Рис.9

Из треугольника  $ADC$  находим модуль равнодействующей по формуле

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha},$$

где  $\alpha$ -угол между векторами  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$ .

Применяя последовательно правило параллелограмма, можно найти равнодействующую скольких угодно сходящихся сил. Найдем сначала равнодействующую трех сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ , приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости (рис.10).

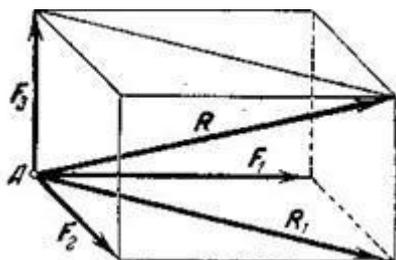


Рис.10

Сложив по правилу параллелограмма силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , получим их равнодействующую  $\vec{R}_1$ , а сложив затем  $\vec{R}_1$  и  $\vec{F}_3$ , найдем равнодействующую  $\vec{R}$  трех данных сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ . Таким образом, равнодействующая трех сил, приложенных в одной точке и не лежащих в одной плоскости, равна по модулю и направлению диагонали параллелепипеда, построенного на этих трех силах (правило параллелепипеда). Заметим, что при нахождении равнодействующей двух сил нет надобности строить весь параллелограмм. Для этого из конца вектора первой силы  $\vec{F}_1$  (рис.11) проводим вектор второй силы  $\vec{F}_2$ . Вектор, соединяющий начальную и конечную точки полученной ломаной линии будет представлять собой по модулю и направлению равнодействующую  $\vec{R}$  двух данных сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (правило треугольника).

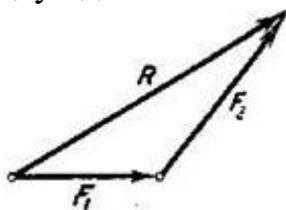


Рис.11

Как известно, в статике сила является скользящим вектором. Поэтому, точки приложения сходящихся сил можно перенести по линиям их действия в точку пересечения этих линий, а следовательно, систему сходящихся сил всегда можно заменить системой сил, приложенных в одной точке.

Пусть теперь нужно сложить несколько сил, например, четыре силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$ , приложенных в точке  $A$  (рис.12). Применяя последовательно правило треугольника, получим ломаную линию  $ABCDE$ . Вектор  $\vec{AE}$ , соединяющий начальную и конечную точки ломаной линии, изображает искомую равнодействующую  $\vec{R}$  четырех сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$ .

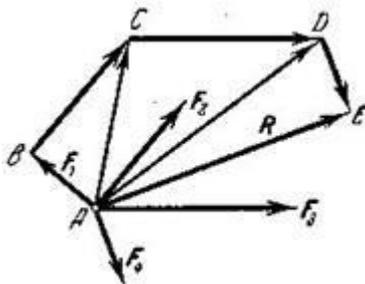


Рис.12

Таким образом, равнодействующая сходящихся сил изображается замыкающей стороной многоугольника сил, приложена в точке пересечения линий действия сил и равна их геометрической сумме

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (6)$$

Спроектировав равенство (6) на координатные оси, и учитывая, что проекция суммы векторов на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций векторов на ту же ось, получим

$$\begin{aligned} R_x &= X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i, \\ R_y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \\ R_z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n Z_i, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $R_x, R_y, R_z$  и  $X_i, Y_i, Z_i$  - проекции соответственно равнодействующей и сил системы на координатные оси.

Модуль равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (8)$$

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил равнялась нулю.

Так как равнодействующая  $\bar{R}$  изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник, то для того чтобы равнодействующая равнялась нулю, силовой многоугольник должен быть замкнутым, то есть конец вектора, изображающего последнюю силу, должен совпадать с началом вектора, изображающего первую силу.

Таково условие равновесия системы сходящихся сил в геометрической форме. Выразим теперь то же условие аналитически.

Из (8) следует, что при равновесии должно иметь место равенство

$$R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 0.$$

Так как все слагаемые в левой части не могут быть отрицательными, то это равенство справедливо только в случае, если  $R_x = R_y = R_z = 0$ . С учетом (7), окончательно получим

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0. \quad (9)$$

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех этих сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

Понятно, что в случае плоской системы сходящихся сил для равновесия должны быть выполнены только первые два из условий (9).

При решении задач статики иногда удобно пользоваться теоремой о трех силах: *если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

В большинстве случаев в задачах статики по заданным (известным) силам, приложенным к данному несвободному твердому телу, требуется определить неизвестные реакции связей, предполагая, что тело находится в покое и все приложенные к нему силы уравниваются. При аналитическом решении задачи эти силы находятся из уравнений (9), в левые части которых войдут, кроме заданных известных сил, и неизвестные реакции связей.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Шар веса  $P$  опирается в точке  $A$  на наклонную плоскость, образующую с вертикалью угол  $\alpha$  и привязан к стене веревкой, которая образует с вертикалью угол  $\beta$  (рис.13а). Определить реакцию плоскости в точке  $A$  и натяжение веревки.

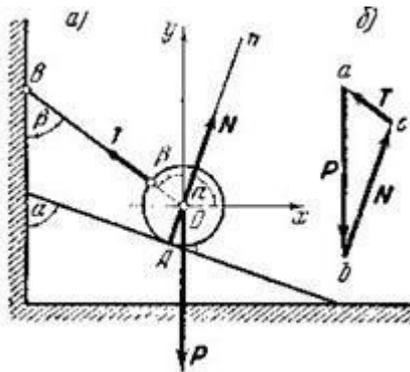


Рис.13

**Решение:** Обозначим искомую реакцию плоскости, направленную по нормали  $AN$  к этой плоскости, через  $\bar{N}$ , а натяжение веревки – через  $\bar{T}$ . Линия действия всех трех сил  $\bar{N}$ ,  $\bar{T}$  и  $\bar{P}$  пересекаются в центре шара  $O$ . Примем вертикаль и горизонталь в точке  $O$  за координатные оси и найдем проекции сил  $\bar{N}$ ,  $\bar{T}$  и  $\bar{P}$  на эти оси:

$$N_x = N \cos \alpha, \quad T_x = -T \sin \beta, \quad P_x = 0,$$

$$N_y = N \sin \alpha, \quad T_y = T \cos \beta, \quad P_y = -P.$$

Так как данная система сходящихся сил является плоской, то условия равновесия (4) имеют вид

- 1)  $N \cos \alpha - T \sin \beta = 0,$
- 2)  $N \sin \alpha + T \cos \beta - P = 0.$

Умножив первое уравнение на  $\cos \beta$ , а второе на  $\sin \beta$  и сложив их, получим

$$N = \frac{P \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Затем из первого уравнения находим

$$T = \frac{P \cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

В случае, когда веревка, удерживающая шар, параллельна наклонной плоскости ( $\beta = \alpha$ ), получим  $N = P \sin \alpha$ ,  $T = P \cos \alpha$ .

Для решения этой же задачи графическим способом, необходимо построить замкнутый силовой многоугольник. Построение силового многоугольника всегда нужно начинать с известных, заданных сил. Из произвольной точки  $a$  (рис.13б) проведем вектор  $\overline{ab}$ , параллельный данной силе  $\overline{P}$ , длина которого в выбранном масштабе изображает модуль этой силы. Затем через точки  $a$  и  $b$  проводим прямые, параллельные линиям действия искомых сил  $\overline{T}$  и  $\overline{N}$ , которые пересекутся в точке  $c$ . Векторы  $\overline{bc}$  и  $\overline{ca}$  определяют искомые силы  $\overline{N}$  и  $\overline{T}$ . Чтобы найти направление искомых сил на силовом треугольнике, нужно обойти этот треугольник по его периметру, причем направление этого обхода определяется направлением данной силы  $\overline{P}$ . Измерив длину сторон  $\overline{ac}$  и  $\overline{bc}$  и зная масштаб, в котором построена сила  $\overline{P}$ , найдем численные значения сил  $\overline{T}$  и  $\overline{N}$ .

**Пример 2.** Определить реакции стержней, удерживающих грузы  $F_1=70$  кН и  $F_2=100$  кН (рис 14,а). Массой стержней пренебречь.

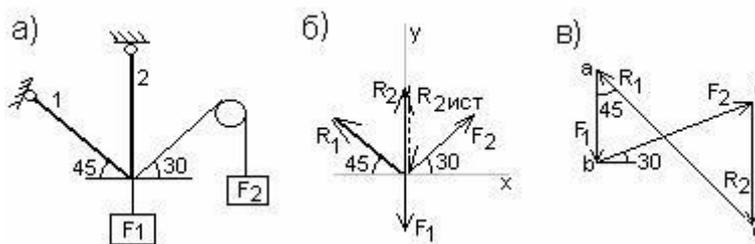


Рис.14

**Указание.** В данной задаче рассматривается равновесие плоской системы сходящихся сил и требуется определить реакции двух шарнирно соединенных между собой стержней, удерживающих два груза. Таким образом, к шарниру  $B$  в каждой задаче приложены четыре силы, из которых две неизвестны. Для задач такого типа универсальным является аналитический метод решения.

*Последовательность решения задачи:*

1. выбрать тело (точку), равновесие которого следует рассматривать;

2. освободить тело (шарнир  $B$ ) от связей и изобразить действующие на него активные силы и реакции отброшенных связей. Причем реакции стержней следует направить от шарнира  $B$ , так как принято считать предположительно стержни растянутыми;

3. выбрать систему координат, совместив ее начало с точкой  $B$ , и составить уравнения равновесия, используя условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости  $\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0$ ;

4. определить реакции стержней из решения указанной системы уравнений;

5. проверить правильность полученных результатов по уравнению, которое не использовалось при решении задачи, либо решить задачу графически.

### **Решение.**

1. Рассматриваем равновесие шарнира  $B$  (рис 14,а)

2. Освобождаем шарнир  $B$  от связей и изображаем действующие на него активные силы и реакции связей (рис.14,б)

3. Выбираем систему координат и составляем уравнения равновесия для системы сил, действующих на шарнир  $B$ .

$$\sum X = -R_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y = R_1 \sin 45 + R_2 + F_2 \sin 30^\circ - F_1 = 0$$

4. Определяем реакции стержней  $R_1$  и  $R_2$ , решая уравнения.

$$R_1 = \frac{F_2 \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0.866}{0.707} = 122.6 \text{ кН}$$

Из уравнения 1:

Подставляем найденное значение  $R_1$  в уравнение 2 и получаем

$$R_2 = F_1 - F_2 \sin 30^\circ - R_1 \sin 45^\circ = 70 - 100 \cdot 0.5 - 122.6 \cdot 0.707 = -66.6 \text{ кН}$$

Знак минус перед значением  $R_2$  указывает на то, что первоначально выбранное направление реакции неверно – следует направить реакцию  $R_2$  в противоположную сторону, т.е. к шарниру  $B$  (на рис.14,б истинное направление реакции  $R_2$  показано штриховым вектором)

5. Проверяем правильность полученных результатов, решая задачу графически (рис. 14,в). Полученная система сил (рис.14,б) находится в равновесии, следовательно, силовой многоугольник, построенный для этой системы сил, должен быть замкнутым.

Строим силовой многоугольник в следующем порядке (рис.14,в): в выбранном масштабе (например,  $\frac{1}{2}$  кН/мм) откладываем заданную силу  $F_1$  ( $ab=F_1$ ), затем из точки  $b$  под углом  $30^\circ$  к горизонту откладываем силу  $F_2$  ( $bc=F_2$ ), далее из точек  $a$  и  $c$  проводим прямые, параллельные положениям стержней 1 и 2. Эти прямые пересекаются в точке  $d$  и в результате построения образуется замкнутый многоугольник  $abcd$ , в котором

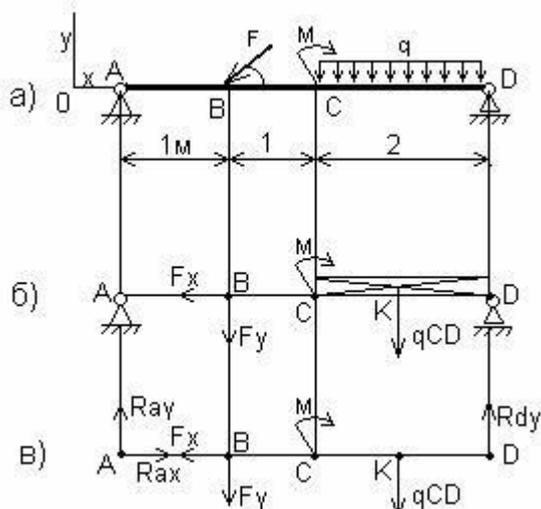
сторона  $cd=R_2$ , а сторона  $da=R_1$ . Измерив длины этих сторон (в мм) и умножив на масштаб построения  $\mu_{СИЛ}$  получаем значения реакций стержней:  $R_2 = cd \cdot \mu_{СИЛ} = 33 \cdot 2 = 66 \text{ кН}$

$$R_1 = da \cdot \mu_{СИЛ} = 61 \cdot 2 = 122 \text{ кН}$$

Графическое решение подтверждает правильность первого решения.

### Плоская система сил

**Пример 1.** Определить реакции опор балки (рис.15, а).



**Рис.15**

**Указание.** Во всех данных задачах требуется определить реакции опор балок. Учащимся необходимо приобрести навыки определения реакций опор, так как с этого начинается решение многих задач по сопротивлению материалов и деталям машин.

*Последовательность решения задачи:*

1. изобразить балку вместе с нагрузками;
2. выбрать расположение координатных осей, совместив ось  $x$  с балкой, а ось  $y$  направив перпендикулярно оси  $x$ ;
3. произвести необходимые преобразования заданных активных сил: силу, наклоненную к оси балки под углом  $\alpha$ , заменить двумя взаимно перпендикулярными составляющими, а равномерно распределенную по закону прямоугольника нагрузку – ее равнодействующей, приложенной к середине участка распределения нагрузки;
4. освободить балку от опор, заменив их действие реакциями опор, направленными вдоль выбранных осей координат;
5. составить уравнения равновесия статики для произвольной плоской системы сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор;

6. проверить правильность найденных опорных реакций по уравнению, которое не было использовано для решения задачи.

**Решение.**

1. Изобразим балку с действующими на нее нагрузками (рис.15,а)

2. Изобразим оси координат  $x$  и  $y$

3. Силу  $F$  заменяем ее составляющими  $F_x = F \cos \alpha$  и  $F_y = F \sin \alpha$ .

Равнодействующая  $q_{CD}$  равномерно распределенной нагрузки, приложенная в точке пересечения диагоналей прямоугольника (рис.15,б), переносится по линии своего действия в середину участка  $CD$ , в точку  $K$ .

4. Освобождаем балку от опор, заменив их опорными реакциями (рис.15,в)

5. Составляем уравнения равновесия статики и определяем неизвестные реакции опор.

а) Из уравнения моментов всех действующих на балку сил, составленного относительно одной из точек опор, сразу определяем одну из неизвестных вертикальных реакций:

$$\sum M_A = F_y \cdot AB + M + q_{CD} \cdot AK - R_D \cdot AD = 0$$

$$R_{Dy} = \frac{F_y \cdot AB + M + q_{CD} \cdot AK}{AD} = \frac{10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3}{4} = 6,5 \text{ кН}$$

б) Определяем другую вертикальную реакцию:

$$\sum M_D = R_{Ay} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - q_{CD} \cdot KD = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F_y \cdot BD - M + q_{CD} \cdot KD}{AD} = \frac{F \sin \alpha \cdot BD - M + q_{CD} \cdot KD}{AD} = \frac{20 \cdot 0,5 \cdot 3 - 10 + 2}{4} = 5,5 \text{ кН}$$

в) Определяем горизонтальную реакцию:

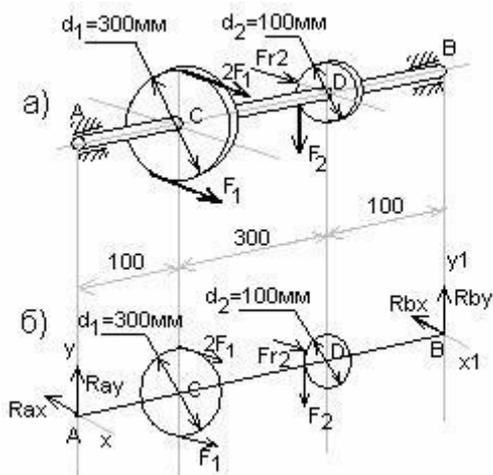
$$\sum X = R_{Ax} - F_x = 0; \quad R_{Ax} = F_x = F \cos \alpha = 20 \cdot 0,86 = 17,3 \text{ кН}$$

6. Проверяем правильность найденных результатов:

$$\sum Y = R_{Ay} - F_y - q_{CD} + R_{Dy} = 5,5 - 10 - 2 + 6,5 = 0$$

Условие равновесия  $\sum Y_i = 0$  выполняется, следовательно, реакции опор найдены верно.

**Пример 2.** На вал (рис.16,а) жестко насажены шкив 1 и колесо 2. Определить силы  $F_2$ ,  $F_{r2}=0,4F_2$ , а также реакции опор  $A$  и  $B$  если  $F_1=100\text{Н}$ .



**Рис.16**

**Указание.**

*Последовательность решения задачи:*

1. изобразить на рисунке тело, равновесие которого рассматривается, с действующими на него активными и реактивными силами и выбрать систему координат;
2. из условия равновесия тела, имеющего неподвижную ось, определить значения сил  $F_1, F_2$ ;
3. составить шесть уравнений равновесия;
4. решить уравнения и определить реакции опор;
5. проверить правильность решения задачи.

**Решение.**

1. Изображаем вал с всеми действующими на него силами, а также оси координат. (рис.16,б)

2. Определяем  $F_2$  и  $F_{r2}$ . Из условия равновесия тела, имеющего неподвижную ось:

$$F_1 \cdot \frac{d_1}{2} - F_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 0 ;$$

$$F_2 = \frac{F_1 d_1}{d_2} = \frac{100 \cdot 0.3}{0.1} = 300 H ;$$

$$F_{r2} = 0.4 F_2 = 0.4 \cdot 300 = 120 H$$

3. Составляем шесть уравнений равновесия:

$$\sum M_X = -R_{BY} \cdot AB + F_2 \cdot AD = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_Y = 3F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_{BX} \cdot AB = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_{X1} = R_{AY} \cdot AB - F_2 \cdot DB = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_{Y1} = R_{AX} \cdot AB - 3F_1 \cdot CB - F_{r2} \cdot DB = 0 \quad (4)$$

$$\sum X = 3F_1 + F_{r2} - R_{AX} - R_{BY} = 0 \quad (5)$$

$$\sum Y = R_{AY} - F_2 + R_{BY} = 0 \quad (6)$$

4. Решаем уравнения (1), (2), (3), (4) и определяем реакции

опор: Из (1):  $R_{BY} = \frac{F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{300 \cdot 0.4}{0.5} = 240H$

Из (2):  $R_{BX} = \frac{3F_1 \cdot AC + F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0.1 + 120 \cdot 0.4}{0.5} = 156H$

Из (3):  $R_{AY} = \frac{F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{300 \cdot 0.1}{0.5} = 60H$

Из (4):  $R_{AX} = \frac{3F_1 \cdot CB + F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0.4 + 120 \cdot 0.1}{0.5} = 264H$

5. проверяем правильность найденных реакций опор. Используем уравнение (5)

$$\sum X = 3F_1 + F_2 - R_{AX} - R_{BX} = 300 + 120 - 264 - 156 = 0$$

$\sum X = 0$ , следовательно, реакции  $R_{AX}$  и  $R_{BX}$  определены верно.

Используем уравнение (6):

$$\sum Y = R_{AY} - F_2 + R_{BY} = 60 - 300 + 240 = 0$$

$\sum Y = 0$ , следовательно, реакции  $R_{AY}$  и  $R_{BY}$  определены верно.

Данную задачу можно решать другим методом: спроектировать тело со всеми действующими на него активными и реактивными силами на три координатные плоскости, чтобы проще было составлять уравнения равновесия.

### Система параллельных сил

Пусть на твердое тело действуют две параллельные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , направленные в одну сторону (рис.17).

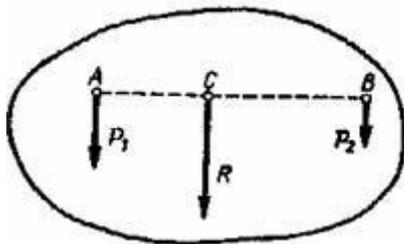


Рис.17

Равнодействующая  $\vec{R}$  двух параллельных сил, направленных в одну сторону, параллельна этим силам и направлена в ту же сторону; модуль равнодействующей равен сумме модулей данных сил, а линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения данных

сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил, т.е.

$$R = P_1 + P_2; \quad AC/BC = P_2/P_1.$$

Используя известное свойство пропорции, можно получить

$$AC/P_2 = BC/P_1 = AB/R.$$

Пусть теперь имеем две параллельные силы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$ , приложенные в точках  $A$  и  $B$  направленные в противоположные стороны; такие силы называются антипараллельными (рис.18).

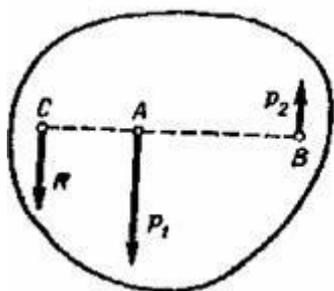


Рис.18

Предположим, что  $\vec{P}_1 > \vec{P}_2$ . Равнодействующая  $\vec{R}$  двух антипараллельных сил параллельна этим силам и направлена в сторону большей силы; модуль равнодействующей равен разности модулей данных сил, а линия ее действия делит расстояние между точками приложения данных сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил, т.е.

$$R = P_1 - P_2; \quad AC/BC = P_2/P_1 \quad \text{и} \quad AC/P_2 = BC/P_1 = AB/R.$$

Как видно, в этом случае линия действия равнодействующей  $\vec{R}$  проходит через точку, лежащую вне отрезка,  $A^{\vec{R}}$  притом ближе к большей силе.

Рассмотрим систему параллельных сил  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ , приложенных в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , приводящуюся к равнодействующей  $\vec{R}$ , приложенной в точке (рис.19).

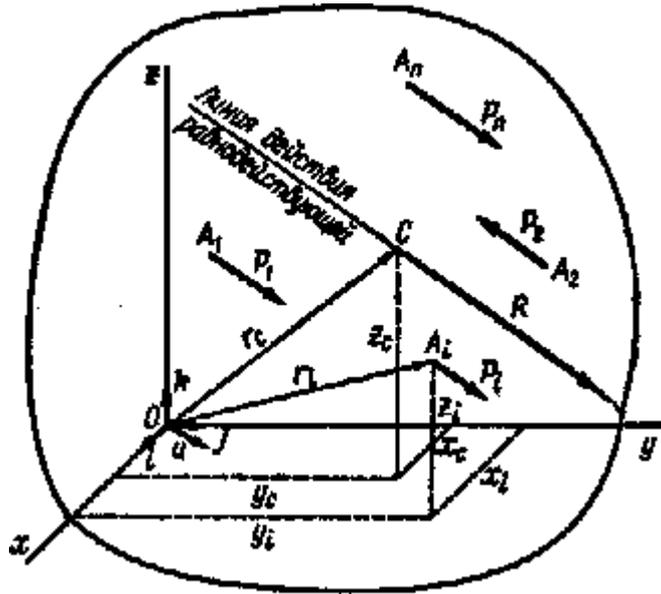


Рис.19

Положение центра параллельных сил  $C$  определится его радиусом-вектором  $\vec{r}_c$  относительно начала координат  $O$  или тремя координатами  $x_c, y_c, z_c$ . Положение точки приложения каждой силы  $\vec{P}_i$  определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_i$  или координатами  $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ .

Опуская выкладки, приведем формулу, определяющую радиус-вектор центра параллельных сил

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i P_i}{\sum P_i} \quad (10)$$

Спроектировав равенство (5) на оси координат, получим формулы для определения координат центра параллельных сил

$$x_c = \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}; \quad z_c = \frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i}. \quad (11)$$

В формулах (11) координаты  $x_i, y_i, z_i$  и значения сил  $P_i$  являются алгебраическими величинами. Заметим, что выбор направления, вдоль которого параллельные силы считаются положительными, произволен и на результатах вычисления координат по формулам (11) не отражается.

Пусть даны параллельные силы  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ , расположенные на плоскости  $xy$ , и приложенные в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Приведем силы к произвольному центру  $O$  (рис.20). Получим в этом центре силу  $\vec{R}^*$ , равную главному вектору, и пару сил с моментом  $M$ , равным главному моменту параллельных сил относительно центра приведения

$$\vec{R}^* = \sum \vec{P}_i; \quad M = \sum M_{i0} \quad (12)$$

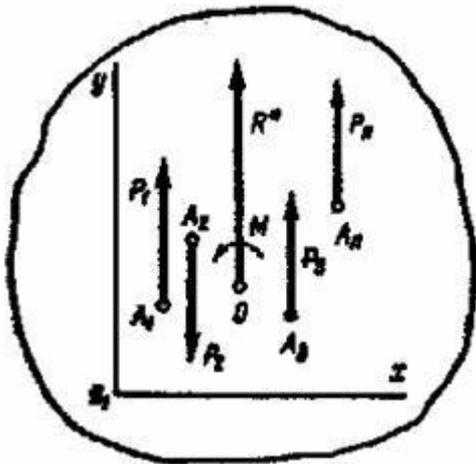


Рис.20

Для системы параллельных сил на плоскости имеем два условия равновесия

$$M = 0 \quad \text{и} \quad \vec{R}^* = 0. \quad (13)$$

Так как ось  $Y$  направлена параллельно силам, то из (12) и (13) уравнения равновесия для данной системы сил можно выразить в виде двух уравнений

$$\sum M_{i0} = 0; \quad \sum P_{iy} = 0. \quad (14)$$

Уравнения (14) называются основными уравнениями равновесия параллельных сил на плоскости. Центр моментов для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Для пространственной системы сил, параллельных, например, оси  $Z$ , имеем три уравнения равновесия

$$\sum M_{ix} = 0; \quad \sum M_{iy} = 0; \quad \sum P_{iz} = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** На тело действуют пять параллельных сил, имеющих модули  $10H$ ,  $15H$ ,  $30H$ ,  $15H$  и  $10H$ , приложенных соответственно в точках  $A_1(1,2,3)$ ,  $A_2(2,3,1)$ ,  $A_3(3,1,2)$ ,  $A_4(0,1,1)$  и  $A_5(1,-1,0)$ , причем первые четыре силы направлены в одну и ту же сторону, а последняя - в противоположную сторону. Найти координаты центра этой системы сил.

**Решение.** Полагая в формулах (14) для координат центра параллельных сил

$$P_1 = 10H, \quad P_2 = 15H, \quad P_3 = 30H, \quad P_4 = 15H, \quad P_5 = -10H \quad \text{и} \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \\ x_4 = 0, \quad x_5 = 1, \quad \text{получим}$$

$$X_C = \frac{10 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 15 \cdot 0 - 10 \cdot 1}{10 + 15 + 30 + 15 - 10} = 2$$

Аналогично, найдем две другие координаты точки  $C$

$$Y_C = 2, \quad Z_C = 2$$

**Пример 2.** К горизонтальной балке, лежащей на двух опорах, приложены вертикальные силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$ . Расстояния точек приложения этих сил от опор и расстояние между опорами указаны на рис.18. Определить реакции опор.

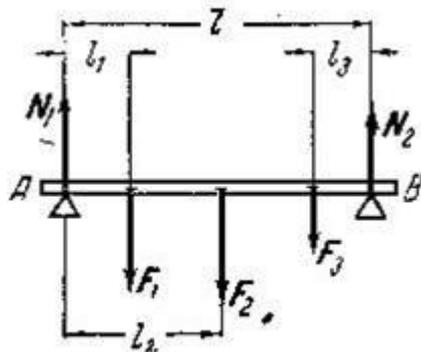


Рис.21

**Решение.** Обозначим реакции опор через  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ . Поскольку балка находится в равновесии, направив ось  $Ay$  вертикально вверх, составим уравнения равновесия (9) для данной задачи

$$1) \sum M_{iA} = 0 \quad \ell N_2 - \ell_1 F_1 - \ell_2 F_2 - (\ell - \ell_3) F_3 = 0$$

$$2) \sum F_{iy} = 0 \quad N_1 - F_1 - F_2 - F_3 + N_2 = 0$$

Из первого уравнения получим

$$N_2 = \frac{\ell_1}{\ell} F_1 + \frac{\ell_2}{\ell} F_2 + \left(1 - \frac{\ell_3}{\ell}\right) F_3$$

Подставив значение  $N_2$  во второе уравнение, найдем  $N_1$

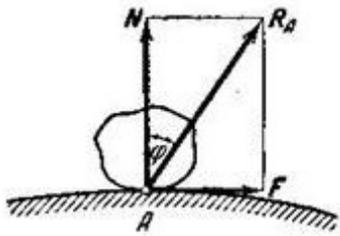
$$N_1 = \left(1 - \frac{\ell_1}{\ell}\right) F_1 + \left(1 - \frac{\ell_2}{\ell}\right) F_2 + \frac{\ell_3}{\ell} F_3$$

### Равновесие тел с учетом трения

Соппротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, называется *трением скольжения*.

Опыты показывают, что реакция  $\vec{R}_A$  неподвижной поверхности образует с нормалью к этой поверхности некоторый угол  $\varphi$  (рис.22), так что эту силу можно разложить на две составляющие: 1) силу  $\vec{N}$ , направленную по нормали к опорной поверхности и называемую *нормальной реакцией*, и 2)

силу  $\vec{F}$ , лежащую в плоскости, касательной опорной поверхности, и противодействующую скольжению тела по этой поверхности. Эта сила называется *силой трения скольжения*.



**Рис.22**

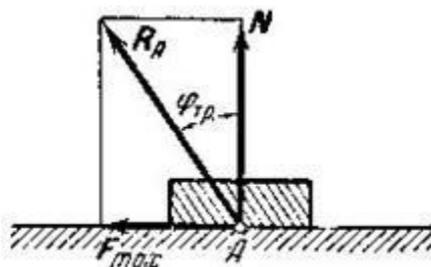
Модуль силы трения в покое может иметь любое значение, заключающееся между нулем и некоторым максимальным значением  $F_{max}$ , зависящим от условий опыта. Сила трения, проявляющаяся при покое тела, называется *силой трения в покое* или *силой статического трения*.

На основании многочисленных опытов установлено, что максимальная величина силы трения в покое прямо пропорциональна нормальной реакции. Если перейти к равенству, получим

$$F_{max} = fN, \quad (15)$$

где  $f$  коэффициент пропорциональности, называемый *статическим коэффициентом трения скольжения*. Величина этого коэффициента зависит от материала трущихся тел, а также от состояния их поверхностей (степени шероховатости, влажности, температуры). Из (1) следует, что коэффициент трения скольжения есть число отвлеченное, т.е. не имеет размерности.

При изучении трения твердых тел, кроме коэффициента трения, важную роль играет также угол трения. Пусть твердое тело покоится на неподвижной поверхности и  $\vec{R}_A$  есть равнодействующая сил  $\vec{N}$  и  $F_{max}$ , т.е. полная реакция опорной поверхности в точке A (рис.23). Угол  $\varphi_{тр}$  между силой  $\vec{R}_A$  и нормалью к опорной поверхности называется *углом трения*.



**Рис.23**

Из прямоугольного треугольника имеем

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}} = \frac{F_{\text{max}}}{N} = f,$$

т.е. тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

Геометрическое место прямых линий, проведенных из точки  $A$  под углом  $\varphi_{\text{тр}}$  к нормали  $n$  опорной поверхности в точке  $A$ , образует коническую поверхность, которая называется конусом трения (рис.24).

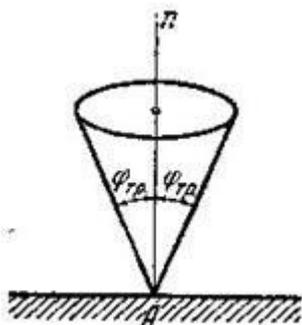


Рис.24

Заметим, что полная реакция опорной поверхности не может быть направлена по прямой, лежащей вне конуса трения.

Аналитический метод решения задач о равновесии твердого тела при наличии трения остается таким же, как и в тех случаях, когда трением пренебрегаем. Различие состоит лишь в том, что в уравнениях равновесия появляются, кроме нормальных реакций, силы трения.

Рассмотрим примеры решения задач.

**Пример 1.** Плоскость  $OA$  может вращаться на шарнире  $O$ , так что ее можно установить под любым углом  $\alpha$  к горизонту. На эту плоскость положено тело весом  $P$  (рис.25). При каком угле  $\alpha$  тело будет оставаться в равновесии?

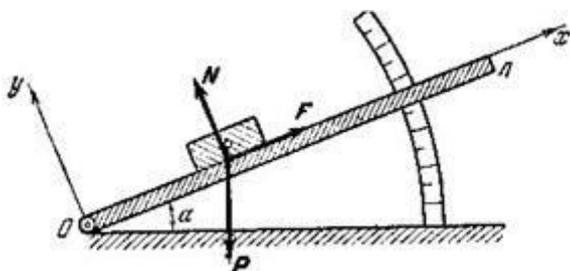


Рис.25

**Решение.** Обозначим через  $\bar{N}$  нормальную реакцию плоскости и через  $\bar{F}$  силу трения. Составим два уравнения равновесия для сходящейся системы сил  $(\bar{N}, \bar{F}, \bar{P})$ , спроектировав их на оси  $Ox$  и  $Oy$

$$F - P \sin \alpha = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0.$$

Из этих уравнений получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{N}.$$

Наибольшее значение, которого может достигнуть сила трения в покое, равно

$$F_{\max} = fN. \text{ Поэтому } F \leq fN, \text{ а следовательно}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{fN}{N}, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Так как  $f = \operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}}$  или  $\alpha \leq \varphi_{\text{тр}}$ .

Отсюда заключаем, что тело будет оставаться в равновесии до тех пор, пока угол наклона плоскости не превышает угла трения.

Заметим, что при помощи прибора, изображенного на рис.25, можно определить коэффициент трения.

**Пример 2.** На рис. 26 показана схема колодочного тормоза. Найти наименьшее значение силы  $\bar{P}$ , необходимое для того, чтобы затормозить шкив  $O_1$ . Коэффициент трения между тормозной колодкой и поверхностью шкива равен  $f$ . Нужные размеры указаны на чертеже.

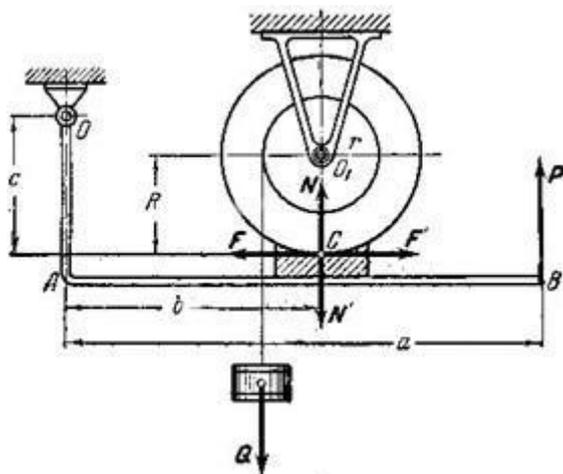


Рис.26

**Решение.** Приложенные к шкиву в точке  $C$  нормальное давление и силу трения обозначим через  $\bar{N}$  и  $\bar{F}$ . В той же точке  $C$  к тормозной колодке приложены нормальная реакция  $\bar{N}'$  и сила трения  $\bar{F}'$ , равные по модулю и противоположные по направлению силам  $\bar{N}$  и  $\bar{F}$ . Напишем условия равновесия для шкива и для рычага  $OAB$  в отдельности, приравняв нулю сумму моментов всех сил, приложенных к шкиву, относительно точки  $O_1$  и сумму моментов сил, приложенных к рычагу, относительно точки  $O$ . Получим два уравнения

$$rQ - RF = 0, \quad cF' + aP - bN' = 0.$$

Положим  $F = kN$ , где  $k \leq f$ . Подставив это значение  $F$  в эти уравнения и заменив  $N'$  и  $F'$  через  $N$  и  $F$ , получим

$$kRN = rQ, \quad aP = bN - ckN = (b - ck)N.$$

Определив величину  $N$  из первого уравнения и подставив ее значение во второе уравнение, найдем

$$P = \frac{Qr}{aR} \left( \frac{b}{k} - c \right).$$

Как видно из формулы, с увеличением коэффициента  $k$  величина  $P$  уменьшается и когда  $k$  достигает наибольшего значения  $f$ , сила  $P$  будет иметь наименьшее значение. Следовательно, окончательно получим

$$P_{\min} = \frac{Qr}{aR} \left( \frac{b}{f} - c \right).$$

### Центр тяжести

Представим себе какое-нибудь твердое тело, находящееся близ поверхности Земли (рис.27). Силы притяжения  $\vec{F}_i$  отдельных частиц тела к Земле направлены приблизительно к центру Земли. Так как размеры рассматриваемых тел малы по сравнению с радиусом Земли, то эти силы можно считать параллельными. Центр  $C$  этой системы параллельных сил называется *центром тяжести* данного тела, а равнодействующая этих

сил  $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , проходящая через точку  $C$ , представляет собой вес этого тела.

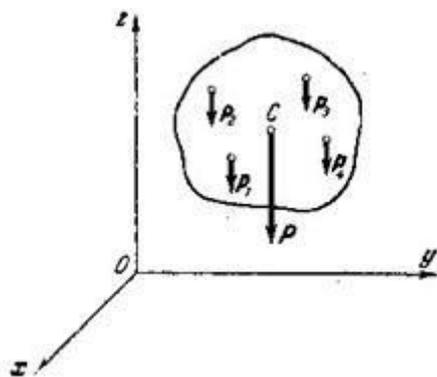


Рис.27

Так как центр тяжести тела есть центр параллельных сил, то для вычисления координат центра тяжести тела можно воспользоваться формулами, приведенными в предыдущем модуле

$$x_c = \sum P_i x_i / P, \quad y_c = \sum P_i y_i / P, \quad z_c = \sum P_i z_i / P \quad (16)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  - координаты любой частицы твердого тела.

Заметим, что в (16) алгебраическими величинами являются только координаты точек, а значения  $P_i$  всегда положительны, так как все силы направлены в одну сторону.

Обозначим объемы элементарных частиц через  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots$ , а вес единицы объема тела через  $\gamma$ . Если тело однородно, то получим

$$P_1 = \gamma \Delta V_1, \quad P_2 = \gamma \Delta V_2, \dots$$

Подставив эти значения сил  $P_i$  в формулы (2), будем иметь

$$x_c = \sum x_i \Delta V_i / V, \quad y_c = \sum y_i \Delta V_i / V, \quad z_c = \sum z_i \Delta V_i / V, \quad (17)$$

где  $V = \sum \Delta V_i$  - объем всего тела.

Для получения точных формул координат центра тяжести однородного тела, нужно в формулах (17) перейти к пределу, полагая, что число элементарных частиц неограниченно возрастает, а объем  $\Delta V_i$  каждой частицы стремится к нулю

$$x_c = \lim \sum x_i \Delta V_i / V, \quad y_c = \lim \sum y_i \Delta V_i / V, \quad z_c = \lim \sum z_i \Delta V_i / V. \quad (18)$$

Если имеем однородное тело, имеющее форму тонкой пластинки, то его можно рассматривать как материальную плоскую фигуру, положение центра тяжести которой определяется двумя координатами  $x_c$  и  $y_c$  (рис.28).

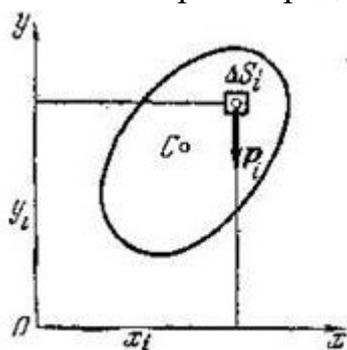


Рис.28

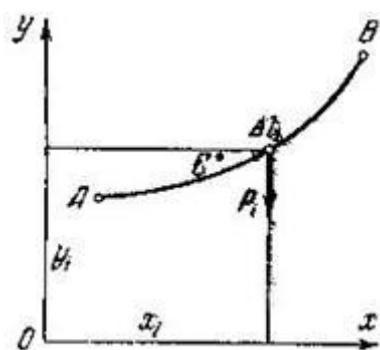
В этом случае вместо элементов объема  $\Delta V_i$  нужно брать элементы площади  $\Delta S_i$ , а в знаменателе вместо  $V$  - площадь  $S$  данной фигуры. Следовательно, для координат центра тяжести плоской фигуры будем иметь

$$x_c = \lim \sum x_i \Delta S_i / S, \quad y_c = \lim \sum y_i \Delta S_i / S. \quad (19)$$

Аналогично, для координат центра тяжести однородной плоской материальной линии (например, тонкой проволоки, согнутой в виде плоской кривой), получим

$$x_C = \lim \sum x_i \Delta \ell_i / \ell, \quad y_C = \lim \sum y_i \Delta \ell_i / \ell, \quad (20)$$

где  $\Delta \ell_i$  - длина элементарной дуги данной линии, а  $\ell$  - вся длина этой линии (рис.29).



**Рис.29**

Следует отметить, что центр тяжести  $C$  кривой линии вообще не лежит на этой линии. Вычисление пределов сумм, входящих в полученные формулы (18), (19) и (20), производится в общем случае методами интегрального исчисления; эти пределы выражаются определенными интегралами, распространенными соответственно на весь объем тела или на всю площадь фигуры или же взятыми вдоль данной линии. Однако, как увидим ниже, если тело имеет простую геометрическую форму, то положение его центра тяжести можно определить элементарным путем.

Приведем вспомогательную теорему для определения положения центра тяжести: *если однородное тело имеет плоскость, или ось, или центр симметрии, то центр тяжести такого тела лежит соответственно в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии.*

Теперь перейдем к определению положения центра тяжести плоской фигуры сложной формы. Пусть требуется определить положение центра тяжести плоской фигуры, состоящей из трех частей, положение центров тяжести которых известно (рис.30).

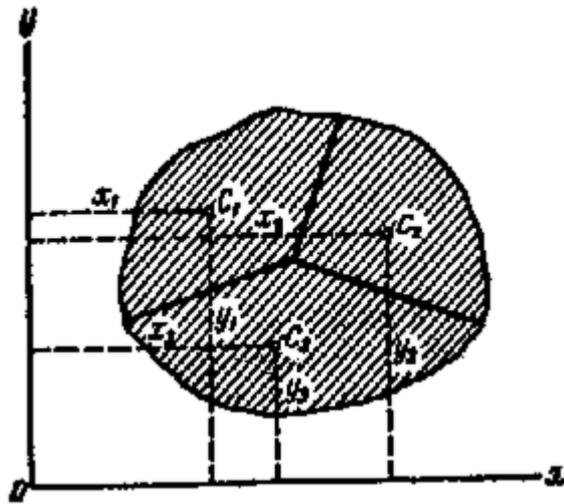


Рис.30

Положим, что площади частей фигуры соответственно равны  $S_1, S_2, S_3$ , а координаты их центров тяжести  $C_1, C_2$  и  $C_3$  будут  $x_1, y_1, x_2, y_2$  и  $x_3, y_3$ . Тогда координаты ее центра тяжести  $C$  определяются формулами

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S}; \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S}. \quad (21)$$

Этими формулами удобно пользоваться и при определении положения центра тяжести плоской фигуры, из которой вырезана некоторая часть (рис.31).

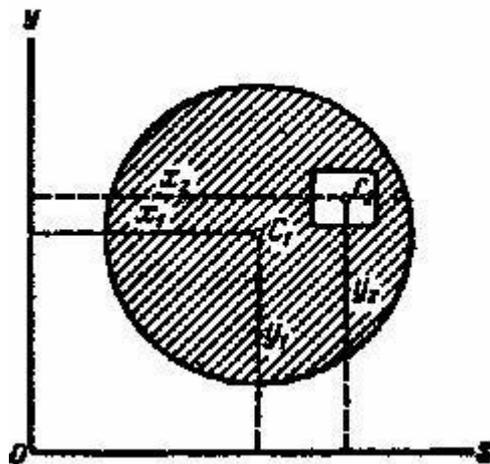


Рис.31

В этом случае координаты центра тяжести выражаются

формулами

$$x_C = \frac{S_1 x_1 - S_2 x_2}{S_1 - S_2}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2}, \quad (22)$$

где  $S_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  - площади соответственно всей фигуры и вырезанной из нее части, а  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  - координаты их центров тяжести.

Этот способ определения центра тяжести плоской фигуры называется *способом отрицательных площадей*.

В заключении приведем формулы для определения положения центров тяжести некоторых фигур.

а) Центр тяжести площади треугольника

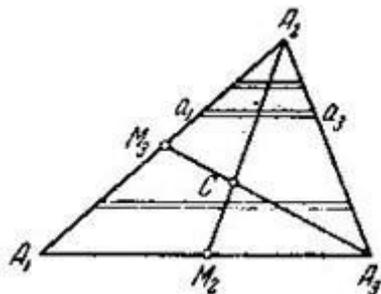


Рис.32

Центр тяжести  $C$  площади треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан  $\left( CM_2 = \frac{A_2M_2}{3} \right)$ .

Если обозначить координаты вершин данного треугольника через  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , то для координат  $x_C$  и  $y_C$  его центра тяжести

получим 
$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$
 (23)

б) Центр тяжести дуги окружности (дуга  $AB$ )

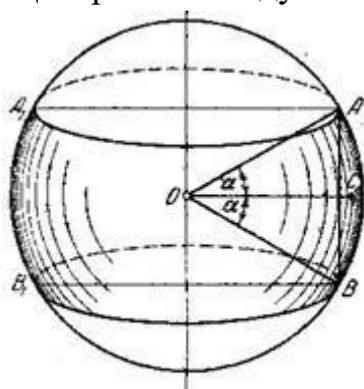


Рис.33

$$OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (24)$$

где  $\alpha$  - половина центрального угла дуги  $AB$ , измеряемого в радианах.

в) Центр тяжести площади кругового сектора ( $AOB$ )

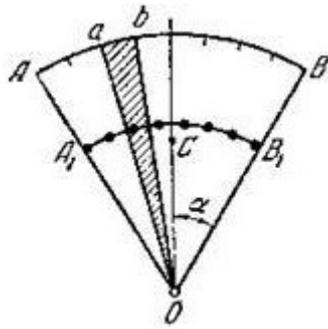


Рис.34

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (25)$$

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Найти центр тяжести фигуры, состоящей из полукруга радиуса  $R$  и прямоугольника со сторонами  $2R$  и  $h$  (рис. 35)

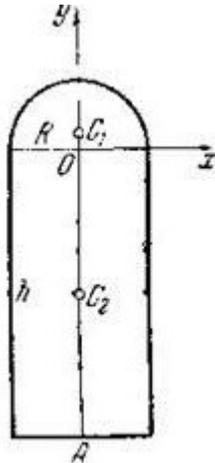


Рис.35

**Решение.** Возьмем начало координат в геометрическом центре  $O$  полукруга и направим координатные оси, как указано на чертеже. Так как ось  $y$  является для данной фигуры осью симметрии то, согласно вышеприведенной теореме, искомый центр тяжести лежит на этой оси и, следовательно,  $x_c = 0$ . Остается найти  $y_c$ . Разобьем фигуру на две части: полукруг и прямоугольник. Центры тяжести этих частей обозначим через  $G_1$  и  $G_2$ . Точка  $G_2$  лежит в середине отрезка  $OA$ . Точка  $G_1$  находится от точки  $O$  на расстоянии  $OG_1$ , равном, согласно формуле (25),  $\frac{4R}{3\pi}$ . Тогда, согласно формулам (21), имеем

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}$$

Здесь  $S_1$  и  $S_2$  - площади полукруга и прямоугольника, а  $y_1$  и  $y_2$  - ординаты точек  $C_1$  и  $C_2$ . Следовательно,

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2}; \quad y_1 = \frac{4R}{3\pi}; \quad S_2 = 2Rh; \quad y_2 = -\frac{h}{2}.$$

Тогда, окончательно получим

$$y_C = \frac{2(2R^2 - 3h^2)}{3(\pi R + 4h)}.$$

**Пример 2.** Определить положение центра тяжести фигуры, представляющей собой круг радиуса  $R$ , из которого вырезан круг меньшего радиуса  $r$ , причем расстояние между центрами кругов  $OO_1 = a$  (рис.36).

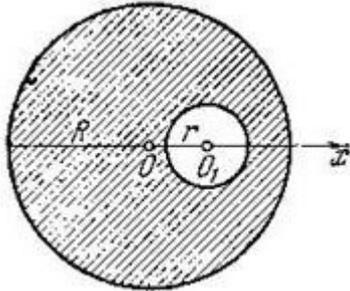


Рис.36

**Решение.** Искомый центр тяжести лежит на оси симметрии  $Ox$ , проходящей через центры кругов  $O$  и  $O_1$ ; начало координат возьмем в центре большого круга. Площадь первого круга  $S_1 = \pi R^2$ , центр тяжести которого совпадает с началом координат  $O$ , т.е.  $x_1 = O$ . Центр тяжести второго круга совпадает с точкой  $O_1$ , абсцисса которой  $x_2 = a$ . Так как площадь  $S_2$  маленького круга будет отниматься, то ее нужно брать со знаком минус, т.е.  $S_2 = -\pi r^2$ .

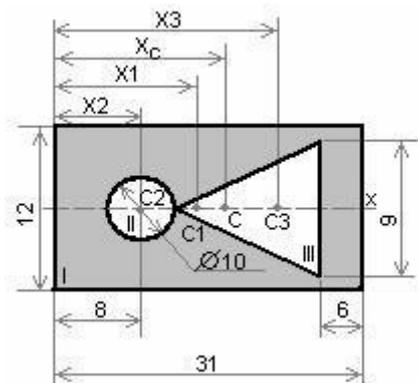
Абсцисса  $x_2$  искомого центра тяжести определяется по формуле (21)

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}.$$

Окончательно получим

$$x_C = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}.$$

**Пример 3.** Определить положение центра тяжести для тонкой однородной пластины, форма и размеры которой, в сантиметрах, показаны на рисунке 37.



**Рис.37**

**Указание.** С целью упрощения решения следует стремиться разбить заданную сложную плоскую фигуру на возможно меньшее число простых частей, применяя в случае необходимости «метод отрицательных площадей».

*Последовательность решения задачи:*

1. изобразить на рисунке пластину и показать все ее размеры;
2. если не указаны заранее, указать на чертеже координатные оси;
3. разбить фигуру на возможно меньшее число простых фигур (треугольник, квадрат, круг, сегмент и т.д.);
4. вычислить площадь каждой части – простой фигуры, учитывая «метод отрицательных площадей» (если простая фигура вырезана из основной, то ее площадь считается отрицательной);
5. находим центр тяжести выделенных простых фигур по стандартным формулам (если имеется ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси);
6. вычисляем координаты  $X_C$  и  $Y_C$  центра тяжести плоской пластины.

**Решение.**

Данную фигуру представляем состоящей из трех простых фигур: 1 – прямоугольник, 2 – круга, 3 – треугольника.

Площади кругового и треугольного отверстий вводим в расчет со знаком минус, а площадь прямоугольника – без учета имеющихся в нем отверстий.

Площади простых фигур:

$$A_1 = 12 \cdot 31 = 372 \text{ см}^2$$

$$A_2 = \pi \cdot 10^2 / 4 = -78.5 \text{ см}^2$$

, где совпадающая с осью симметрии высота треугольника  $h = 31 - (8 + 10/2 + 6) = 12 \text{ см}$

Фигура имеет ось симметрии, следовательно, ее центр тяжести лежит на этой оси. Совмещаем координатную ось  $x$  с осью симметрии, а начало

координат – с левым краем фигуры (чтобы координаты центров тяжести оказались положительными).

Координаты центра тяжести простых фигур:  $x_1 = 31/2 = 15,5\text{см}$ ,  $x_2 = 8\text{см}$ ,  $x_3 = 31 - 6 - 12/3 = 21\text{см}$ , где  $12/3$  – расстояние от центра тяжести треугольника до его основания, равное  $1/3$  высоты.

Координата центра тяжести заданной фигуры

$$X_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{372 \cdot 15,5 - 78,5 \cdot 8 - 54 \cdot 21}{372 - 78,5 - 54} = 16,7\text{см}$$

Ответ: 16,7 см

### ***Произвольная пространственная система сил***

Если силы, действующие на тело, лежат в пространстве, то такая система сил называется пространственной, и если главный вектор и главный момент системы равны нулю, то система сил уравновешенная.

Следовательно, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы будут  $R = 0$ ,  $M = 0$  - в векторной форме. Так как при равновесии главный момент равен нулю относительно любого центра приведения, то вместо  $M_0$  можно писать  $M$  без индекса.

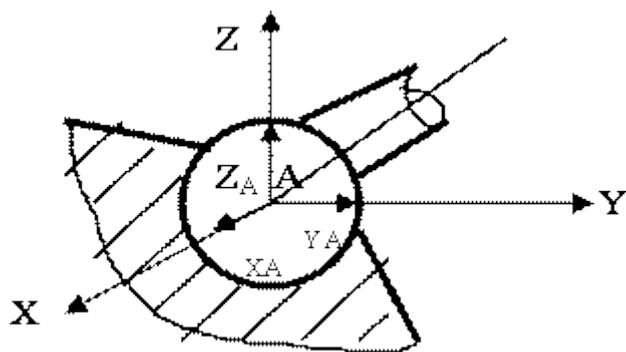
Спроектировав главный вектор  $R$  на координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  получим аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил, которые выражаются шестью уравнениями равновесия и

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

и формулируется так: произвольная пространственная система сил находится в равновесии, если сумма проекций сил на каждую из координатных осей и сумма моментов всех сил относительно осей координат равны нулю.

При решении необходимо рассмотреть связи, которые до сих пор не встречались нам.

Подпятник (рис.38) - это тип опоры не препятствующий повороту тела или какой-либо его детали вокруг своего центра, но препятствующий смещению тела в любом направлении, поэтому для такого типа опоры не известны ни величина реакции, ни образуемые ею с координатами осями углы, а известна только точка приложения реакции.



**Рис. 38**

Такую реакцию можно представить составляющими, направленными в положительных направлениях трех осей координат (отрицательный знак, полученный при решении уравнения равновесия, покажет, что в действительности та или иная составляющая опорной реакции направлена в противоположную выбранному направлению сторону).

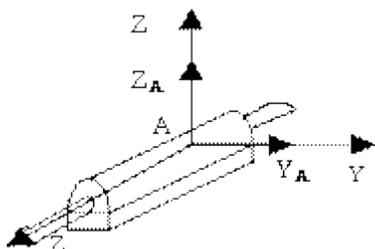
В большинстве задач требуется определить не реакцию, а ее составляющие, сама реакция определяется как диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на составляющих  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  как на сторонах.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Направление реакции можно определить по направляющим косинусам

$$\begin{aligned} \cos(R, x) &= x/R, \\ \cos(R, y) &= y/R, \\ \cos(R, z) &= z/R. \end{aligned} \quad (29)$$

Подшипник (рис.39) - это цилиндрический шарнир, позволяющий телу или его элементу (например, валу, оси и т.д.) поворачиваться вокруг своей оси, смещаться вдоль нее, но не позволяющему перемещаться в перпендикулярной плоскости к его оси, следовательно, реакция подшипника может быть расположена только в плоскости, перпендикулярной к его оси. Зная в этой плоскости только точку приложения реакции и не зная угла, образуемого его с какой-либо находящейся в этой плоскости осью, представляем реакцию двумя составляющими, направленными в положительные стороны координатных осей, расположенных в этой плоскости. Сама реакция  $R$  может быть определена как равнодействующая определенных составляющих  $Z$  и  $Y$ .



**Рис.39**

$$R = \sqrt{Y^2 + Z^2} \quad (30)$$

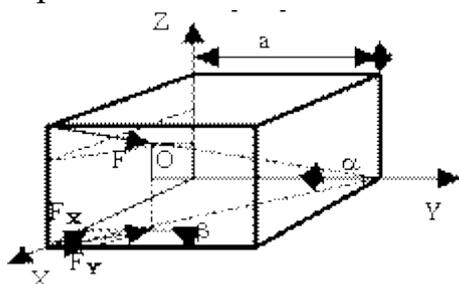
Направление ее может быть найдено по формулам:

$$\cos(R, y) = y/R, \quad (31)$$

$$\cos(R, z) = z/R.$$

**Порядок (план) решения задач.**

1. Установить, равновесие какого тела нужно рассмотреть, чтобы определить неизвестные величины.
2. Выбрать начало координат и положения координатных осей.
3. Установить, какие активные силы действуют на тело.
4. Освободившись от связей, наложенных на рассматриваемую систему, заменить действие связей силами реакций связей.
5. Составить соответствующие уравнения равновесия.
6. Решая уравнения равновесия, определить неизвестные величины.
7. Найдя знаки неизвестных сил, установить их фактические направления.



**Рис.40**

Рассмотрим сначала методику определения проекций силы на оси координат и моментов ее относительно этих осей. Пусть по внутренней диагонали куба (рис.40) действует сила  $F$ . Определим проекции силы  $F$  на оси координат и моменты ее относительно осей. Чтобы найти проекции силы на ось координат, необходимо применить метод двойного проектирования, который заключается в том, что сначала сила проецируется на плоскость, включающую данную ось, а затем уже эта проекция проецируется на данную ось. Так, чтобы определить проекцию силы  $F$  на ось  $X$ , необходимо сначала спроецировать ее на плоскость  $XOY$ , а уже затем на ось ординат. В результате получим, что

$$F_x = -F \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\text{где } \cos \alpha = a\sqrt{2}/a\sqrt{3} = \sqrt{2}/\sqrt{3}, \quad \sin \beta = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2};$$

$$F_x = -F \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

Знак минус показывает, что направление проекции противоположно положительному направлению оси  $X$ . Аналогично,

$$F_y = F \cos \alpha \sin \beta,$$

где  $\cos \beta = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2},$

$$F_y = F \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

Проекция силы  $F$  на ось  $Z$  определяется как

$$F_z = -F \sin \alpha,$$

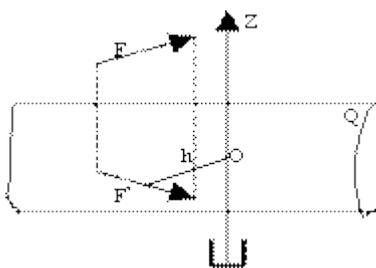
где  $\sin \alpha = a/a\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}.$

$$F_z = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

Итак, убеждаемся, что сила направлена на внутренней диагонали куба, то проекция силы на все оси одинаковы.

При определении момента силы относительно оси координат необходимо помнить, что он равен произведению проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси на перпендикуляр, опущенный из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы. Знак момента будет положительным, если, посмотрев с положительного направления оси координат увидим вращение плоскости под действием проекции против часовой стрелки и, наоборот, отрицательный если это вращение совпадает с вращением стрелки часов.



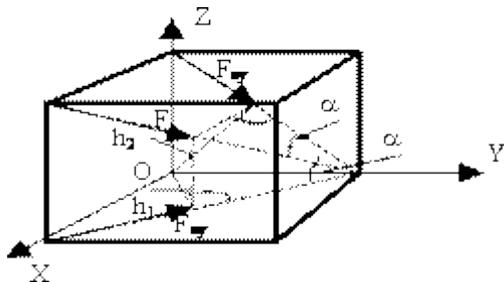
**Рис.41**

Так, момент силы  $F$  (рис.41) относительно оси  $Z$  будет равен произведению проекции силы  $F$  на плоскость  $Q$ , перпендикулярную оси  $Z$ , на перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  пересечения оси с этой плоскостью на линию действия проекции силы  $F'$ Итак

$$M_z = (F) = F' h.$$

Знак момента положительный, так как вокруг оси  $Z$  плоскость  $Q$  под действием проекции  $F'$ , если смотреть с

положительного направления оси  $Z$ , вращается против часовой стрелки. Момент силы относительно оси координат будет равен 0, когда сила параллельна этой оси или пересекает ее.



**Рис.42**

Так, в примере (рис.42) сила  $F$  пересекает ось  $Y$ , следовательно, ее момент относительно  $Y$  равен нулю. Момент силы  $F$  относительно оси  $X$  будет произведение проекции силы на плоскость перпендикулярную оси  $X$  (плоскость  $ZOY$ ) на перпендикуляр, опущенный из точки  $O$ , пересечения оси  $X$  с плоскостью  $ZOY$  на линию действия проекции силы на эту плоскость:

$$M_x = -F_{xy} h_x,$$

где 
$$F_{xy} = F \cos \alpha = F \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad h_x = a \cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$M_x = -\frac{F\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{Fa}{\sqrt{3}}.$$

Знак (-) показывает, что плоскость  $ZOY$  под действием проекции  $F_{xy}$  вокруг оси  $X$  вращается по часовой стрелке. Аналогично

$$M_z = F_{xy} h_1 = \frac{F\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{Fa}{\sqrt{3}}.$$

Учитывая, что

$$M_x = yZ - zY,$$

$$M_y = zX - Yx,$$

$$M_z = xY - yX,$$

где  $x, y, z$  - координаты точки приложения силы,  $X, Y, Z$  - проекции силы на соответствующие оси.

Координаты точки  $A(a, 0, a)$ .

Проекции силы 
$$F_x = -\frac{F}{\sqrt{3}}, \quad F_y = \frac{F}{\sqrt{3}}, \quad F_z = -\frac{F}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя, проверим результаты наших рассуждений:

$$M_x = 0 \left( -\frac{F}{\sqrt{3}} \right) - a \left( \frac{F}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{Fa}{\sqrt{3}}.$$

$$M_y = a \left( -\frac{F}{\sqrt{3}} \right) + a \left( \frac{F}{\sqrt{3}} \right) = 0,$$

$$M_z = a \left( \frac{F}{\sqrt{3}} \right) - 0 \left( -\frac{F}{\sqrt{3}} \right) = \frac{Fa}{\sqrt{3}}.$$